数理解析研究所講究録
第 1584 巻 2008 年 245-255

対称錐上の単調な相補性問題に対する同次アルゴリズム

筑波大学大学院システム情報工学研究科 吉瀬章子*
Akiko Yoshise
Graduate School of Systems and Information Engineering, University of Tsukuba

2007 年 11 月

1 はじめに

Andersen と Ye は論文 [3] において，線形計画問題に対する自己双対アルゴリズムを拡張して，単調な相補性問題に対する同次モデルを提案した．このモデルは以下の好ましい性質を有する．

(a) 許容内点の存在などの仮定をおくことなく，自明な初期点をもつ有界なパスが存在する．

(b) パスの任意の集積点は同次モデルの解である．

(c) 元の問題が解を持つならば，パスのすべての集積点から元の問題の有界な解が算出できる．

(d) 元の問題が強く非許容であるならば，Lipschitz 連続性の仮定の下で，パスのすべての集積点から非許容性を判定することができる．

(e) 元の問題が線形であるならば，$\mathcal{O}(\sqrt{n}\log\epsilon^{-1})$ の反復回数で解を得るアルゴリズムが存在する．

論文 [24, 25] では，以上の結果を対称錐上の相補性問題に拡張することを試み，(a)–(d) の性質をもつ同次モデルと，(e) に対応する計算複雑度のアルゴリズムを提案している．この稿ではこれらの論文で得られている結果の概要を述べる．

2 Euclid 的 Jordan 代数と対称錐上の相補性問題

$(V,\circ)$ を Euclid 的 Jordan 代数であるとする．すなわち V は有限次元のベクトル空間であり，双線形な積 $x\circ y$ はすべての $x,y\in V$ に対して以下をみたす．

(i) $x\circ y=y\circ x$,

(ii) $x\circ(x^2\circ y)=x^2\circ(x\circ y)$ （ただし $x^2=x\circ x$），

* 〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, yoshise@sk.tsukuba.ac.jp. 本研究は，科学研究補助金 (基盤 (C)1856052, 基盤 (C)17560050, 基盤 (B)1831001, 萌芽研究 18651076) の助成を受けている．

(iii) $x^2 + y^2 = 0 \implies [x = 0,\ y = 0]$.

(iii) は等価に

(iii') $\langle x \circ y, z\rangle = \langle y, x \circ z\rangle$ をみたす内積が存在する

に置き換えることができ，特に $x \circ y$ の最小多項式の第1係数を $\mathrm{tr}\,(x \circ y)$ と書くことにすれば，$(x, y) \mapsto \mathrm{tr}\,(x \circ y)$ は (i)–(iii) の下で正定値性をもつことが知られており [5]，このことから内積を

$$\langle x, y\rangle = \mathrm{tr}\,(x \circ y)$$

として定義することができる．V の対称錐を K と表すことにする．すなわち K は自己双対な閉凸錐であり[1], 任意の $x \in \mathrm{int}K$ と $y \in \mathrm{int}K$ に対して, $\Gamma(K) = K$ かつ $\Gamma(x) = y$ である可逆な写像 $\Gamma : V \to V$ が存在する．Euclid 的 Jordan 代数において，$K \subset V$ が対称錐であるための必要十分条件は，$K = \{x \circ x :\ x \in V\}$ であることが知られている．$(xy) \mapsto x \circ y$ は双線形写像であるので, 各 $x \in V$ に対して，任意の $y \in V$ に対して $L(x) = x \circ y$ をみたす線形作用素 $L(x)$ を定義することができる．また $x, y \in V$ に対して, x の2次形式を以下のように定義する．

$$Q_{x,y} := L(x)L(y) + L(y)L(x) - L(x \circ y), \quad Q_x := Q_{x,x} = 2L^2(x) - L(x^2)$$

x の2次形式はアルゴリズムの探索方向を議論する際に重要な役割をもつ．

多くの文献で対称錐上の最適化問題が扱われているが，その理由として

- 対称錐は非負領域上，2次錐上，対称半正定値行列錐上の最適化問題の理論的な性質を，統一的な方法で導出することができる (参照 [6, 7, 22, 20, 24]),
- 論文 [18] において，内点法の有効性を特徴付ける錐として導入された自己変換錐が，対称錐と同一であること (参照 [12, 21, 13]),
- 対称錐を解析の対象とすることにより，最適化問題あるいは相補性問題に対するより代数的なアプローチが可能となること (参照 [5, 8, 10, 23, 11])

などが挙げられる．特に Schmieta と Alizadeh は論文 [22] において，対称錐上の最適化問題に対する主双対内点法を構築する上で重要となる基礎理論を与えた．本稿で紹介する結果の多くはこの基礎理論に基づいている．

V の階数が r であるとする．V の対称錐 K 上の単調な（非線形）相補性問題の標準形 SCP は以下のように与えられる．

$$\begin{array}{lll} \text{(SCP)} & \text{Find} & (x, y) \in K \times K \\ & \text{s.t.} & F(x, y) := y - \psi(x),\ x \circ y = 0. \end{array}$$

ただし $\psi : K \to V$ は微分可能であり，K 上で単調，すなわち任意の $x, x' \in K$ に対して

$$\langle \psi(x) - \psi(x'), x - x'\rangle \geq 0$$

をみたす．

以下の節では，この単調相補性問題の標準形 SCP に対する同次モデルと，その解を求めるための同次アルゴリズムを紹介し，その結果得られる成果について述べる．

[1] 本来対称錐は $\mathrm{int}K$ で定義されるが，ここでは便宜上 K を対称錐と呼んでいる．

3 対称錐上の相補性問題に対する同次モデル

論文 [24] では，前節で定義した対称錐上の相補性問題 SCP に対して，2 つの新たな変数 κ と τ を導入し，以下のような同次モデル HCP を提案している．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(HCP)} & \text{Find} & (x,\tau,y,\kappa) \in (K \times \Re_{++}) \times (K \times \Re_{+}) \\
 & \text{s.t.} & F_{\mathrm{H}}(x,\tau,y,\kappa) = 0,\ (x,\tau) \circ_{\mathrm{H}} (y,\kappa) = 0.
\end{array}
$$

ここで各記号の定義は以下のとおりである．

$$
\begin{aligned}
&\Re_{+} := \{\tau \in \Re :\ \tau \ge 0\},\quad \Re_{++} := \{\tau \in \Re :\ \tau > 0\},\\
&V_{\mathrm{H}} := V \times \Re,\quad K_{\mathrm{H}} := K \times \Re_{+},\quad x_{\mathrm{H}} := (x,\tau) \in V_{\mathrm{H}},\quad y_{\mathrm{H}} := (y,\kappa) \in V_{\mathrm{H}},\\
&\psi_{\mathrm{H}}(x_{\mathrm{H}}) = \psi_{\mathrm{H}}(x,\tau) := \begin{pmatrix} \tau\psi(x/\tau) \\ -\langle \psi(x/\tau), x\rangle \end{pmatrix},\\
&F_{\mathrm{H}}(x_{\mathrm{H}}, y_{\mathrm{H}}) = y_{\mathrm{H}} - \psi_{\mathrm{H}}(x_{\mathrm{H}}),\\
&x_{\mathrm{H}} \circ_{\mathrm{H}} y_{\mathrm{H}} := \begin{pmatrix} x \circ y \\ \tau\kappa \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

集合 K_{H} は 2 つの対称錐 K と $\Re_{+}$ の直積であり

$$
K_{\mathrm{H}} = \left\{ x_{\mathrm{H}}^2 = \begin{pmatrix} x^2 \\ \tau^2 \end{pmatrix} :\ x_{\mathrm{H}} \in V_{\mathrm{H}} \right\}
$$

で与えられる V_{H} の対称錐である．以上から，HCP は元の問題に新たな 2 つの変数を加えた，対称錐上の相補性問題の標準形の形式を保持していることがわかる．

前節で仮定した K 上での ψ の単調性により，intK_{H} 上で ψ_{H} が単調であることを示すことができる (Proposition 5.3 of [24])．しかし，関数 ψ_{H} と F_{H} はそれらの関数の定義域上で定義されていないため，関数 ψ や F に比べて注意深く扱う必要がある．このため，相補性問題 SCP に対して，下記のような「漸近的」許容性や, 非許容性に関する定義を用意しておく．

- SCP が「漸近的な許容解をもつ」とは，

  $$\lim_{k\to\infty} F(x^{(k)}, y^{(k)}) = 0$$

  である有界な点列 $\{(x^{(k)}, y^{(k)})\} \subseteq \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K$ が存在することである．このとき SCP は「漸近的許容である」という．

- SCP が 「漸近的な解をもつ」とは，

  $$\lim_{k\to\infty} F(x^{(k)}, y^{(k)}) = 0 \text{ かつ } \lim_{k\to\infty} x^{(k)} \circ y^{(k)} = 0.$$

  である有界な点列 $\{(x^{(k)}, y^{(k)})\} \subseteq \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K$ が存在することである．このとき SCP は「漸近的可解である」という．

- SCP が「非許容である」とは，$F(x,y) = 0$ をみたす解が存在しないことである．

- SCP が「強非許容である」とは， $\lim_{k\to\infty} F(x^{(k)}, y^{(k)}) = 0$ である点列 $\{(x^{(k)}, y^{(k)})\} \subseteq \mathrm{int}K \times \mathrm{int}K$ が存在しないことである．

同次モデル HCP について，論文 [24] では以下が示されている．

定理 3.1 (Theorem 5.4 and 5.5 of [24]). 関数 $\psi : K \to V$ は K 上で単調であるとする. 以下を定義する.

$$h_{\mathrm{H}}^{(0)} := \begin{pmatrix} x_{\mathrm{H}}^{(0)} \circ_{\mathrm{H}} y_{\mathrm{H}}^{(0)} \\ F_{\mathrm{H}}(x_{\mathrm{H}}^{(0)}, y_{\mathrm{H}}^{(0)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{\mathrm{H}} \\ y_{\mathrm{H}}^{(0)} - \psi_{\mathrm{H}}(x_{\mathrm{H}}^{(0)}) \end{pmatrix}.$$

ただし $(x_{\mathrm{H}}^{(0)}, y_{\mathrm{H}}^{(0)}) = (e_{\mathrm{H}}, e_{\mathrm{H}})$, $e_{\mathrm{H}} = (e, 1) \in \mathrm{int} K_{\mathrm{H}}$ は V_{H} における単位元であり,

$$\mathrm{tr}\,(e_{\mathrm{H}}) = \mathrm{rank}\,(V_{\mathrm{H}}) = r + 1$$

である. このとき以下が成り立つ.

(i) *HCP* の任意の漸近的許容解 $(\hat{x}_{\mathrm{H}}, \hat{y}_{\mathrm{H}})$ は, *HCP* の漸近的な解である.

(ii) *HCP* は非許容であるが, 漸近的許容である.

(iii) *SCP* が解をもつことと, *HCP* が $\tau^* > 0$ である漸近的な解 $(x_{\mathrm{H}}^*, y_{\mathrm{H}}^*) = (x^*, \tau^*, y^*, \kappa^*)$ を持つことは等価である. *with* このとき, $(x^*/\tau^*, y^*/\tau^*)$ は *SCP* の解である.

(iv) 関数 ψ は K 上で *Lipschitz* 連続であるとする. すなわち任意の $x \in K$, $h \in V$ に対して

$$\|\psi(x+h) - \psi(x)\| \leq \gamma \|h\|$$

であるような定数 $\gamma \geq 0$ が存在するとする. このとき, *SCP* が強非許容であるならば, *HCP* は $\kappa^* > 0$ である漸近的な解 $(x^*, \tau^*, y^*, \kappa^*)$ を持つ. 逆に, *HCP* が $\kappa^* > 0$ である漸近的な解 $(x^*, \tau^*, y^*, \kappa^*)$ を持つのであれば, *SCP* は非許容である. 後者の場合, $(x^*/\kappa^*, y^*/\kappa^*)$ は *SCP* の非許容性の根拠を与える.

(v) 集合

$$P := \{(x_{\mathrm{H}}, y_{\mathrm{H}}) \in \mathrm{int} K_{\mathrm{H}} \times \mathrm{int} K_{\mathrm{H}} : \ H_{\mathrm{H}}(x_{\mathrm{H}}(t), y_{\mathrm{H}}(t)) = t h_{\mathrm{H}}^{(0)}, \ t \in (0, 1]\}$$

は $\mathrm{int} K_{\mathrm{H}} \times \mathrm{int} K_{\mathrm{H}}$ における有界なパスである. このパスの任意の集積点 $(x_{\mathrm{H}}(0), y_{\mathrm{H}}(0))$ は *HCP* の解である.

(vi) *HCP* が $\tau^* > 0$ である漸近的な解 $(x_{\mathrm{H}}^*, y_{\mathrm{H}}^*) = (x^*, \tau^*, y^*, \kappa^*)$ を持つのであれば, 有界なパス P の任意の集積点 $(x_{\mathrm{H}}(0), y_{\mathrm{H}}(0)) = (x(0), \tau(0), y(0), \kappa(0))$ は $\tau(0) > 0$ をみたす.

また, *HCP* が $\kappa^* > 0$ である漸近的な解 $(x_{\mathrm{H}}^*, y_{\mathrm{H}}^*) = (x^*, \tau^*, y^*, \kappa^*)$ を持つのであれば, 有界なパス P の任意の集積点 $(x_{\mathrm{H}}(0), y_{\mathrm{H}}(0)) = (x(0), \tau(0), y(0), \kappa(0))$ は $\kappa(0) > 0$ をみたす.

上記の定理は, 1 節で述べた $K = \Re_+^n$ に対する同次モデルの性質 (a)–(d) が, 対称錐上の相補性問題に対して拡張可能であることを意味している.

4 対称錐上の相補性問題に対する同次アルゴリズム

この節では, 論文 [25] に基づき, 定理 3.1 の (v) で述べられている有界なパス P を数値的に追跡するアルゴリズム (同次アルゴリズム) と, その反復回数の計算複雑度について述べる.

同次アルゴリズムでは以下のような自明な点を初期点として与えることができる.

$$(x_{\mathrm{H}}^0, y_{\mathrm{H}}^0) := (e_{\mathrm{H}}, e_{\mathrm{H}}), \quad s_{\mathrm{H}}^0 := y_{\mathrm{H}}^0 - \psi_{\mathrm{H}}(x_{\mathrm{H}}), \quad \mu_{\mathrm{H}}^0 := \langle x_{\mathrm{H}}^0, y_{\mathrm{H}}^0 \rangle_{\mathrm{H}} / (r+1).$$

定理 3.1 の (ii) で述べたように，HCP は漸近的許容であるが非許容であるので，この初期点も非許容解である．各反復 (x_H, y_H) において，以下の方程式系を考える．

$$H_H(x_H, y_H) = \begin{pmatrix} x_H \circ_H y_H \\ y_H - \psi_H(x_H) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_H e_H \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

この方程式系に Newton 法を適用することにより，以下の線形方程式系が得られる．

$$\begin{cases} \Delta x_H \circ y_H + x_H \circ \Delta y_H = \gamma \mu_H e - x_H \circ y_H, \\ \Delta y_H - D\psi(x_H)\Delta x_H = -\eta s_H. \end{cases} \tag{3}$$

ただし

$$(\Delta x_H,\ \Delta y_H) \in V \times V,\ s_H := y_H - \psi_H(x_H),\ \mu_H = \langle x_H, y_H \rangle_H/(r+1) \tag{4}$$

であり，$\eta, \gamma \in [0,1]$ はそれぞれ許容性と相補性の近似の強さを操作するためのパラメータである．この方程式の解として得られる探索方向は，$xy + yx$ 方向と呼ばれる [1].

もう 1 つの探索方向として，Monteiro-Zhang 族に含まれる，以下の可換クラスの探索方向を考える [16, 17]. $(x_H, y_H) \in \mathrm{int}K_H \times \mathrm{int}K_H$ に対して，以下の集合を定義する．

$$\mathcal{P}(x_H, y_H) := \left\{ p \in \mathrm{int}K_H \mid Q_p x_H \text{ かつ } Q_{p^{-1}} y_H \text{ は可換である.} \right\}.$$

また，

$$\tilde{x}_H := Q_p x_H,\ \ \tilde{y}_H := Q_{p^{-1}} y_H. \tag{5}$$

とする．このとき可換クラスの探索方向 $(\Delta x_H, \Delta y_H)$ は以下で与えられる．

$$(\Delta x_H, \Delta y_H) := (Q_p^{-1}\widetilde{\Delta x}_H, Q_p \widetilde{\Delta y}_H) \tag{6}$$

ただし $(\widetilde{\Delta x}_H, \widetilde{\Delta y}_H)$ は，$\mu_H = \langle \tilde{x}_H, \tilde{y}_H \rangle_H/(r+1)$ としたときの，以下のスケーリングされた Newton 方程式系の解である．

$$\begin{cases} \widetilde{\Delta x}_H \circ_H \widetilde{\Delta y}_H + \widetilde{\Delta x}_H \circ_H \widetilde{\Delta y}_H = \gamma \mu_H e - \tilde{x}_H \circ_H \tilde{y}_H, \\ \widetilde{\Delta y}_H - D\widetilde{\psi}_H(\tilde{x}_H)\widetilde{\Delta x}_H = -\eta \left(\tilde{y}_H - \widetilde{\psi}_H(\tilde{x}_H) \right) \end{cases} \tag{7}$$

$\phi_1 \bullet \phi_2$ を関数 ϕ_1 と ϕ_2 の合成関数とすれば．$\gamma, \eta \in (0,1)$, $p \in \mathcal{P}(x_H, y_H)$ に対して

$$\widetilde{\psi}_H(\tilde{x}_H) := Q_p^{-1} \bullet \psi_H \bullet Q_p^{-1}(\tilde{x}_H) = Q_p^{-1}\psi_H(x_H)$$

と記述することができる．

以下の定理は，可換クラスの探索方向が必ず定義できることを保証している．

補助定理 4.1 (Lemma 6.3 of [25]). 方程式系 *(7)* は唯一の解 $(\widetilde{\Delta x}, \widetilde{\Delta y}) := (Q_p \Delta x, Q_p^{-1} \Delta y)$ をもつ．

$p = y_H^{1/2}$ とすれば, $\tilde{y}_H = e_H$ であり，$p \in \mathcal{P}(x_H, y_H)$ であることがわかる．この方法を xy 法と呼ぶ．同様に，$p = x_H^{-1/2}$ とすれば, $\tilde{x}_H = e_H$) であり，$p \in \mathcal{P}(x_H, y_H)$ である．この方法を yx 法と呼ぶ．$p \in \mathcal{P}(x_H, y_H)$ とすれば，$\tilde{x}_H = \tilde{y}_H$ であり，この方法を Nesterov-Todd (NT) 法と呼ぶ．

次の反復の点は，探索方向上での関数 ψ_H の振る舞いを近似した，以下の 1 次元の曲線上で決定する．

$$\begin{cases} x_H(\alpha) & := & x_H + \alpha \Delta x_H, \\ y_H(\alpha) & := & y_H + \alpha \Delta y_H + \psi_H(x_H(\alpha)) - \psi_H(x_H) - \alpha D\psi_H(x_H)\Delta x_H, \\ & = & \psi_H(x_H(\alpha)) + (1 - \alpha\eta)s_H. \end{cases} \tag{8}$$

ここで最後の等号は，(3) 式の最初の式と s_H の定義 (4) から得られる．

この曲線探索の手法は Monteiro and Adler [15] によって最初に導入され, 非負領域上での非線形な問題を考える多くの論文で用いられている (参照 [26, 19, 14]).

またパスの近傍として, 次の 3 つのタイプを考える.

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_F(\beta) &:= \{(x_H, y_H) \in_H K \times K_H \mid d_F(x_H, y_H) \le \beta\mu_H\},\\ \mathcal{N}_2(\beta) &:= \{(x_H, y_H) \in K_H \times K_H \mid d_2(x_H, y_H) \le \beta\mu_H\},\\ \mathcal{N}_{-\infty}(\beta) &:= \{(x_H, y_H) \in K_H \times K_H \mid d_{-\infty}(x_H, y_H) \le \beta\mu_H\}.\end{aligned} \tag{9}$$

ただし, $\beta \in (0,1)$, $w_H = Q_{x_H^{1/2}} y_H$ であり,

$$\begin{aligned}d_F(x_H, y_H) &:= \|Q_{x_H{}^{1/2}} y_H - \mu_H e_H\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{r+1} (\lambda_i(w_H) - \mu_H)^2}\\ d_2(x, y) &:= \|Q_{x_H{}^{1/2}} y_H - \mu_H e_H\|_2\\ &= \max\{|\lambda_i(w_H) - \mu_H| \ (i = 1, \ldots, r+1)\} = \max\{\lambda_{\max}(w_H) - \mu_H,\ \mu_H - \lambda_{\min}(w_H)\},\\ d_{-\infty}(x_H, y_H) &:= \mu_H e_H - \lambda_{\min}(w_H)\end{aligned}$$

である. 任意の $\beta \in (0,1)$ に対して, 包含関係 $\mathcal{N}_2(\beta) \subseteq \mathcal{N}_2(\beta) \subseteq \mathcal{N}_{-\infty}(\beta)$ が成り立つ (Proposition 29 of [22]). このことから, 近傍 $\mathcal{N}_2(\beta)$, $\mathcal{N}_2(\beta)$, $\mathcal{N}_{-\infty}(\beta)$ を用いるアルゴリズムをそれぞれショートステップアルゴリズム, セミロングステップアルゴリズム, ロングステップアルゴリズムと呼ぶ.

以下では 2 種の探索方向と 3 種の近傍それぞれに対する曲線 (8) 上の振る舞いを調べることにより, 6 つのパス追跡法の反復回数の上限を導く. 一般の単調な非線形関数をそのまま解析することは困難であるため, 関数 ψ の Lipschitz 型の性質を定量的に表すパラメータ $\theta \ge 0$ を導入し, 以下を仮定する. ψ に関するこの仮定は, 論文 [15, 26, 19, 14, 3] などで広く用いられている「スケーリングされた Lipschitz 連続性」の拡張と考えることができる.

仮定 4.1. ある $\theta \ge 0$ が存在して, 任意の $z \in \mathrm{int}K$, $\Delta z \in V$, $p \in \mathcal{P}(x, y)$, $z(\alpha) \in \mathrm{int}K$ である $\alpha \in [0,1]$ に対して以下が成り立つ.

$$\left\|\tilde{z}(\alpha) \circ \left(\widetilde{\psi}(\tilde{z}(\alpha)) - \widetilde{\psi}(\tilde{z}) - \alpha D\widetilde{\psi}(\tilde{z})\widetilde{\Delta z}\right)\right\|_F \le \alpha^2\theta\langle\widetilde{\Delta z}, D\widetilde{\psi}(\tilde{z})\widetilde{\Delta z}\rangle.$$

ここで

$$\widetilde{\Delta z}(\alpha) = Q_p(z + \alpha\Delta z),\ \widetilde{\psi}(\tilde{z}) = Q_p^{-1} \bullet \psi \bullet Q_p^{-1}(\tilde{z}) = Q_p^{-1}\psi(z)$$

であり, $\phi_1 \bullet \phi_2$ は関数 ϕ_1 と ϕ_2 の合成を表す.

ψ がアフィン関数であれば, ψ は $\theta = 0$ でこの仮定が成り立つ. 曲線探索を行う関数は ψ ではなく同次モデルにおける ψ_H であるが, 以下の定理が示すように, ψ に対して仮定 4.1 が成り立つのであれば, ψ_H も同様の性質をみたす.

定理 4.1 (Theorem 8.1 of [25]). $\psi : K \to V$ に対して仮定 *4.1* が成り立つとする. このとき ψ_H は *for all* $x_H \in \mathrm{int}K_H$, $\Delta x_H \in V$, $p_H \in \mathcal{P}(x_H, y_H)$, $x_H(\alpha) \in \mathrm{int}K$ である $\alpha \in [0,1]$ に対して以下をみたす.

$$\left\|\tilde{x}_H(\alpha) \circ_H \left(\widetilde{\psi}_H(\tilde{x}_H(\alpha)) - \widetilde{\psi}_H(\tilde{x}_H) - \alpha D\widetilde{\psi}_H(\tilde{x}_H)\widetilde{\Delta x}_H\right)\right\|_F \le \sqrt{5}\alpha^2\theta\langle\widetilde{\Delta x}_H, D\widetilde{\psi}_H(\tilde{x}_H)\widetilde{\Delta x}_H\rangle_H$$

ただし,

$$\widetilde{\Delta x}_H(\alpha) = Q_{p_H}(x_H + \alpha\Delta z_H),\ \widetilde{\psi}_H(\tilde{z}_H) = Q_{p_H}^{-1} \bullet_H \psi_H \bullet_H Q_{p_H}^{-1}(\tilde{x}_H) = Q_{p_H}^{-1}\psi_H(x_H)$$

である. このことから, 仮定 *4.1* における θ を $\sqrt{5}\theta$ に置き換えれば, ψ_H は同仮定における *Lipschitz* 型条件をみたすことがわかる.

また，ステップサイズに関して以下の結果が得られる．

定理 4.2 (Theorem 9.1 of [25]). $\beta \in (0,1)$ かつ $1-\eta-\gamma=0$ であり，$\psi_{\mathrm{H}} : K \to V$ に対して仮定 *4.1* が成り立つとする．

$$\bar{\alpha} := \frac{\beta\gamma\mu_{\mathrm{H}}}{(1+\sqrt{5}\theta)\|\widetilde{\Delta x_{\mathrm{H}}}\|_{\mathrm{F}}\|\widetilde{\Delta y_{\mathrm{H}}}\|_{\mathrm{F}}}.$$

とすれば，以下が成り立つ．

(i) $(x_{\mathrm{H}}, y_{\mathrm{H}}) \in \mathcal{N}_{\mathrm{F}}(\beta)$ であるとき，任意の $0 \le \alpha \le \bar{\alpha}$ に対して，$(x_{\mathrm{H}}(\alpha), y_{\mathrm{H}}(\alpha)) \in \mathcal{N}_{\mathrm{F}}(\beta)$ をみたす．

(ii) $(x_{\mathrm{H}}, y_{\mathrm{H}}) \in \mathcal{N}_2(\beta)$ であるとき，任意の $0 \le \alpha \le \bar{\alpha}$ に対して，$(x_{\mathrm{H}}(\alpha), y_{\mathrm{H}}(\alpha)) \in \mathcal{N}_2(\beta)$ をみたす．

(iii) $(x_{\mathrm{H}}, y_{\mathrm{H}}) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\beta)$ であるとき，任意の $0 \le \alpha \le \bar{\alpha}$ に対して，$(x_{\mathrm{H}}(\alpha), y_{\mathrm{H}}(\alpha)) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\beta)$ をみたす．

上記の定理に現れる $\bar{\alpha}$ は，実際のアルゴリズムで用いるステップサイズの下界値として利用できる．実際のアルゴリズムでは，この下界を利用して，$(x_{\mathrm{H}}(\alpha), y_{\mathrm{H}}(\alpha)) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\beta)$ が近傍に含まれるという条件の下で最大の α を求め，(8) より次の反復の点を決定する．

ここで同次アルゴリズムの詳細を以下に与える．

Input 1. $\epsilon > 0$ と $\beta \in (0,1)$ を選択する．

2. アルゴリズムで用いる近傍 $\mathcal{N}(\beta) \in \{\mathcal{N}_{\mathrm{F}}(\beta),\ \mathcal{N}_2(\beta),\ \mathcal{N}_{-\infty}(\beta)\}$ を選択する．

3. $\mathcal{N}(\beta) = \mathcal{N}_{\mathrm{F}}(\beta)$ であれば $\gamma := 1 - 1/\sqrt{r+1}$ とし，$\mathcal{N}(\beta) = \mathcal{N}_2(\beta)$ あるいは $\mathcal{N}(\beta) = \mathcal{N}_{-\infty}(\beta)$ であれば $\gamma := 1/2$ とする．

4. $\eta = 1 - \gamma$ とする．

5. $k := 0$ とし，．初期点を $(x_{\mathrm{H}}^{(0)}, y_{\mathrm{H}}^{(0)}) := (e_{\mathrm{H}} e_{\mathrm{H}}) \in \mathcal{N}(\beta)$ とする．$\mu^{(0)} := \langle x^{(0)}, y^{(0)} \rangle_{\mathrm{H}}/(r+1) = 1$ とする．

begin

while $\mu > \epsilon$ **do**

1. $(x_{\mathrm{H}}, y_{\mathrm{H}}) := (x_{\mathrm{H}}^{(k)}, y_{\mathrm{H}}^{(k)})$ とし $\mu_{\mathrm{H}} := \mu_{\mathrm{H}}^{(k)}$ とする．

2. $p \in \mathcal{P}(x_{\mathrm{H}}, y_{\mathrm{H}})$ を選び，(5) より $(\tilde{x}, \tilde{y})$ を求める．

3. スケーリングされた Newton 方程式 (7) の解を求め，(6) の逆変換を行って，Newton 探索方向 $(\Delta x_{\mathrm{H}}, \Delta y_{\mathrm{H}})$ を求める．

4. (8) で定義される $x_{\mathrm{H}}(\alpha)$ と $y_{\mathrm{H}}(\alpha)$ に対して，$(x_{\mathrm{H}}(\alpha), y_{\mathrm{H}}(\alpha)) \in \mathcal{N}(\beta)$ である最大のステップサイズ $\bar{\alpha} \in (0,1]$ を求める．

5. 次の反復の点を $(x_{\mathrm{H}}^{(k+1)}, y_{\mathrm{H}}^{(k+1)}) := (x_{\mathrm{H}}(\bar{\alpha}), y_{\mathrm{H}}(\bar{\alpha}))$ とし，$\mu_{\mathrm{H}}^{(k+1)} := \langle x_{\mathrm{H}}^{(k+1)}, y_{\mathrm{H}}^{(k+1)} \rangle_{\mathrm{H}}/(r+1)$，$k := k+1$ とする．

end

end.

このアルゴリズムの反復回数の上限を算出するためには，定理 4.2 における $\bar{\alpha}$ について，反復回数に依存しない $\bar{\alpha}$ の下界値を求めることが重要になる．以下の定理より，反復回数に依存しない $\bar{\alpha}$ の下界値が得られる．

定理 4.3 (Theorem 7.1 of [25]). *(5)* が与える $(\tilde{x}, \tilde{y})$ に対して $G = L(\tilde{y})^{-1}L(\tilde{x})$ とし，K_G を G の条件数

$$K_G = \frac{\lambda_{\max}(G)}{\lambda_{\min}(G)}.$$

とする．$\eta, \gamma \in (0,1)$ が $1-\eta-\gamma=0$ をみたすとき，以下が成り立つ．

(i) $(x,y) \in \mathcal{N}_F(\beta)$ であれば

$$\|\widetilde{\Delta x}\|_F \|\widetilde{\Delta y}\|_F \leq \frac{1}{2}\sqrt{K_G}\left(\frac{\beta^2 + (1-\gamma)^2(r+1)}{1-\beta}\right)\mu$$

である．

(ii) $(x,y) \in \mathcal{N}_2(\beta) \cup \mathcal{N}_{-\infty}(\beta)$ であれば，

$$\|\widetilde{\Delta x}\|_F \|\widetilde{\Delta y}\|_F \leq \frac{1}{2}\sqrt{K_G}\left(1 - 2\gamma + \frac{\beta^2 + (1-\gamma)^2(r+1)}{1-\beta}\right)\mu$$

である．

以上から，条件数 $\sqrt{K_G}$ が各反復で一様に上に有界である場合については，以下の結果が得られる．

定理 4.4 (Theorem 10.1 of [25]). $\psi : K \to V$ に対して仮定 *4.1* が成り立ち，アルゴリズムのすべての反復において条件数 $\sqrt{K_G}$ が $\kappa < \infty$ 以下であるとする．このとき以下が成り立つ．

(i) ショートステップアルゴリズムは $\mathcal{O}\left(\kappa\sqrt{r}(1+\theta)\log \epsilon^{-1}\right)$ の反復で停止する．

(ii) セミロングステップアルゴリズムとロングステップアルゴリズムは $\mathcal{O}\left(\kappa r(1+\theta)\log \epsilon^{-1}\right)$ の反復で停止する．

条件数 $\sqrt{K_G}$ は探索方向の算出に利用するスケーリング $p \in \mathcal{P}(x_H, y_H)$ に左右されるが，xs 法，sx 法，NT 法については，$\sqrt{K_G}$ に関して，反復回数によらない定数の上界値が存在することが知られている．

補助定理 4.2 (Lemma 36 of [22]). $G = L(\tilde{y})^{-1}L(\tilde{x})$ とする．

(i) NT 法において，G の条件数 K_G は常に 1 である．

(ii) xy 法と yx 法において，

- **(a)** $(x,y) \in \mathcal{N}_F(\beta) \cup \mathcal{N}_2(\beta)$ であれば $K_G \leq 2/(1-\beta)$ であり，
- **(b)** $(x,y) \in \mathcal{N}_{-\infty}(\beta)$ であれば $K_G \leq r/(1-\beta)$ である．

この補助定理 4.2 と定理 4.4 より，以下の系を得る．

系 4.1. $\psi : K \to V$ に対して仮定 *4.1* が成り立つとする．このとき，同次アルゴリズムが停止するまでの反復回数は，NT 法，xy 法，あるいは yx 法のそれぞれについて，以下のように与えられる．

	NT 法	xy あるいは yx 法
$\mathcal{N}_F(\beta)$ を用いるショートステップ	$\mathcal{O}\left(\sqrt{r}(1+\theta)\log\epsilon^{-1}\right)$	$\mathcal{O}\left(\sqrt{r}(1+\theta)\log\epsilon^{-1}\right)$
$\mathcal{N}_2(\beta)$ を用いるセミロングステップ	$\mathcal{O}\left(r(1+\theta)\log\epsilon^{-1}\right)$	$\mathcal{O}\left(r(1+\theta)\log\epsilon^{-1}\right)$
$\mathcal{N}_{-\infty}(\beta)$ を用いるロングステップ	$\mathcal{O}\left(r(1+\theta)\log\epsilon^{-1}\right)$	$\mathcal{O}\left(r^{1.5}(1+\theta)\log\epsilon^{-1}\right)$

ψ がアフィン関数であれば $\theta=0$ であるので，上記の結果は対称錐上の線形関数あるいは凸 2 次関数の最適化問題に対する最良の結果と一致する

5 おわりに

この稿では，論文 [24] と論文 [25] をもとに，対称錐上の単調な標準型相補性問題に対する同次モデルと，この同次モデルが以下の性質をもつことを紹介した．

(a) 許容内点の存在などの仮定をおくことなく，自明な初期点をもつ有界なパスが存在する．

(b) パスの任意の集積点は同次モデルの解である．

(c) 元の問題が解を持つならば，パスのすべての集積点から元の問題の有界な解が算出できる．

(d) 元の問題が強く非許容であるならば，Lipschitz 連続性の仮定の下で，パスのすべての集積点から非許容性を判定することができる．

さらに仮定 4.1 により関数 ψ が Lipschitz 型の連続性を有するのであれば，

(e1) 非許容型の NT 探索方向を用いる場合，short-step のステップサイズを選択する場合は $O(\sqrt{r}(1+\theta)\log\epsilon^{-1})$，semi-long-step あるいは long-step のステップサイズを選択する場合は $O(r(1+\theta)\log\epsilon^{-1})$ の反復回数で ϵ-近似解を得る．

(e2) 非許容型の xy あるいは yx 探索方向を用いる場合，ショートステップのステップサイズを選択する場合は $O(\sqrt{r}(1+\theta)\log\epsilon^{-1})$，セミロングステップのステップサイズを選択する場合は $O(r(1+\theta)\log\epsilon^{-1})$，ロングステップのステップサイズを選択する場合は $O(r^{1.5}(1+\theta)\log\epsilon^{-1})$ の反復回数で ϵ-近似解を得る．

元の問題が線形であるならば，$\theta=0$ であり，これらの結果は，対称錐上の線形あるいは凸 2 次最適化問題に対してこれまで得られている反復回数の最良オーダーとなっている．

参考文献

[1] F. Alizadeh, J.P. Haebely, M.L. Overton. Primal-dual interior-point methods foe semidefinite programming: Convergence rates, stability and numerical results. *SIAM Journal on Optimization*, 8:746–768, 1998.

[2] F. Alizadeh and S.H. Schmieta. Symmetric cones, potential reduction methods and word-by-word extensions. *Handbook of semidefinite programming. Theory, algorithms, and applications.* Edited by H. Wolkowicz, R. Saigal and L. Vandenberghe. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[3] E. Andersen and Y. Ye. On a homogeneous algorithm for the monotone complementarity problems. *Mathematical Programming*, 84:375–400, 1999.

[4] F. Facchinei and J.-S. Pang. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems: Volume I*, Springer, 2003.

[5] J. Faraut and A. Korányi. *Analysis on symmetric cones* Oxford Science Publishers, 1994.

[6] L. Faybusovich. Euclidean Jordan algebras and interior-point algorithms. *Positivity*, 1:331-357, 1997.

[7] L. Faybusovich. Linear systems in Jordan algebras and primal-dual interior point algorithms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 86:149-175, 1997.

[8] L. Faybusovich and T. Tsuchiya. Primal-dual algorithms and infinite-dimensional Jordan algebras of finite rank. *Mathematical Programming*, 97:471-493, 2003.

[9] L. Faybusovich. Several Jordan-algebraic aspects of optimization. Department of Mathematics, University of Notre Dame. 2007.

[10] M.S. Gowda, R. Sznajder and J. Tao. Some P-properties for linear transformations on Euclidean Jordan algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 393:203-232, 2004.

[11] M.S. Gowda and R. Sznajder. Some global uniqueness and solvability results for linear complementarity problems over symmetric cones. *SIAM Journal on Optimization* 18:461-481, 2007.

[12] O. Güler. Barrier functions in interior-point methods. *Mathematics of Operations Research*, 21:860–885, 1996.

[13] R.A. Hauser and O. Güler. Self-scaled barrier functions on symmetric cones and their classification. *Foundations of Computational Mathematics*, 2:121-143, 2002.

[14] B. Jansen, K. Roos, T, Terlaky and A. Yoshise. Polynomiality of primal-dual affine scaling algorithms for nonlinear complementarity problems. *Mathematical Programming* 77:315-345, 1997.

[15] R.D.C. Monteiro and I. Adler. An extension of Karmarkar type algorithm to a class of convex separable programming problems with global linear rate of convergence. *Mathematics of Operations Research* 15:408-422, 1990.

[16] R.D.C. Monteiro and Y. Zhang. A unified analysis for a class of path-following primal-dual interior-point algorithms for semidefinite programming. *Mathematical Programming* 81:281-299, 1998.

[17] M. Muramatsu. On commutative class of search directions for linear programming over symmetric cones. *Journal of Optimization Theory and Applications* 112:595-625, 2002.

[18] Yu.E. Nesterov and M.J. Todd. Self-scaled barriers and interior-point for convex programming. *Mathematics of Operations Research*, 22:1-42, 1997.

[19] F. Potra and Y. Ye. Interior-point methods for nonlinear complementarity problem *Journal of Optimization Theory and Application*, 88: 617-642, 1996.

[20] B.K. Rangarajan. Polynomial convergence of infeasible-interior-point methods over symmetric cones. *SIAM Journal of Optimization* 16:1211–1229, 2006.

[21] S.H. Schmieta. Complete classification of self-scaled barrier functions. Technical report, Department of IEOR, Columbia University, New York, 2000.

[22] S.H. Schmieta and F. Alizadeh. Extension of primal-dual interior-point algorithm to symmetric cones. *Mathematical Programming* 96:409-438, 2003.

[23] J. Tao and M.S. Gowda. Some P-properties for nonlinear transformations on Euclidean Jordan algebras. *Mathematics of Operations Research* 30:985-1004 (2005).

[24] A. Yoshise. Interior point trajectories and a homogeneous model for nonlinear complementarity problems over symmetric cones. *SIAM Journal on Optimization* 17:1129-1153, 2006.

[25] A. Yoshise. A. Yoshise. Homogeneous algorithms for monotone complementarity problems over symmetric cones. Preprint, 2007.

[26] J. Zhu. A path following algorithm for a class of convex programming problems. *Zeitschrift fur Operations Research*, 36:359–377, 1992.